УДК 517.5

Кашпіровський О. І.

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОЇ ПСЕВДОМЕТРИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВИНЕНЬ В РЯДИ ДІРІХЛЕ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВСЕРЕДИНІ КВАДРАТА

Ряди Діріхле для аналітичних функцій всередині квадрата розглядаються як розклад за власними функціями оператора диференціювання. За допомогою псевдометрики встановлено аналог формули Гріна. Вказано спосіб введення метрики, в якій ряд Діріхле буде розкладом за ортогональною системою функцій.

Ключові слова: *розвинення, ряд Фур'є, ряд Діріхле, скалярний добуток, псевдометрика, аналітична функція, опуклий многокутник.*

У комплексній площині C^1 розглядається квадрат зі стороною $Q(l)$:

$$Q(l)=\left\{z=x+iy, x\in R^1, y\in R^1, |x|\le l, |y|\le l\right\}.$$

Нехай A_k його вершини

$$A_1=-l(1+i),\quad A_2=l(1-i),$$
$$A_3=l(1+i),\quad A_4=-l(1-i)$$

$\alpha_k=-i^k l, k=\overline{1,4}$ − середини його сторін.

У даній роботі для функцій $f(z)$ аналітичних у середині квадрата $Q(l)$ досліджуються розвинення в ряди Діріхле [1]

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda_n z} \qquad (1)$$

із застосуванням оперативного підходу до теорії наближень [2] та комплекснозначної псевдометрики [3].

Такі ряди досить часто зустрічаються в роботах багатьох математиків. Ряди Діріхле є узагальненням рядів Фур'є, які є значно краще дослідженими. Розклад 2π − періодичної функції в ряд Фур'є

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{inx} \qquad (2)$$

є розвиненням за власним ортогональним базисом $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ самоспряженого в $L_2(-\pi;\pi)$ оператора A, породженого диференціальним виразом $i\dfrac{d}{dx}$ з періодичними граничними умовами

$$f(-\pi)=f(\pi).$$

Ситуація з дослідженням рядів Діріхле виглядає значно складнішою. Для рядів Діріхле взагалі відсутня єдність представлення. Так О. Ф. Леонтьєвим наведено приклад нетривіального ряду Діріхле, який всередині квадрата $Q(l)$ збігається до нуля рівномірно на компактах [26].

Дослідженню розвинень в ряди Діріхле аналітичних функцій в опуклій комплексній області Q присвячена серія робіт О. Ф. Леонтьєва [1, 4–11], які з'являлися, починаючи з 1951 року, більше сорока років. Крім того, подібні питання досліджувалися у роботах В. К. Дзядика [12–14], Е. К. Критиголови [13], Ю. І. Мельніка [15–17], А. М. Седлецького [18–20], А. П. Хромова [22–23], В. В. Напалкова [24], І. Ф. Красічкова-Терновського [21] та інших.

Якщо Q є опуклий многокутник, то, як показав у 1974 році В. К. Дзядик [14], функція $f(z)$ аналітична всередині многокутника допускає розщеплення на суму m періодичних аналітичних функцій (m – кількість сторін Q)

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}f_k(z).$$

Кожна функція $f_k(z)$ періодично продовжується з відповідної їй сторони $\Gamma_\kappa\,(k=\overline{1,m})$ на пряму γ_k, що проходить через сторону Γ_k. З прямої γ_k функція $f_k(z)$ аналітично продовжується у напівплощину Π_k. Ця напівплощина визначається прямою γ_k і містить у собі многокутник Q, причому:

$$Q=\bigcap_{k=1}^{m}\Pi_k$$

У розвиненні (1) кожна функція $f_k(z)$ представлена своїм розвиненням в ряд Фур'є на стороні Γ_k.

У випадку квадрата $Q(l)$ ряд Діріхле (1) для функції аналітичної всередині $Q(l)$, що має вигляд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{4}f_k(z)=\sum_{k=1}^{4}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}a_{nk}\varphi_{nk}(z)\Big),$$

де $\varphi_{nk}(z)=\exp\Big(\dfrac{i^{2-k}\pi n}{l}(z+i^k l)\Big)$.

Зокрема функція $f_1(z)$, що відповідає стороні $\Gamma_1=[A_1,A_2]$ квадрата $Q(l)$ допускає розвинення в ряд Фур'є такого виду

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n1} \exp(\frac{i\pi n}{l}(z+il)).$$

Для визначення коефіцієнтів ряду Діріхле О. Ф. Леонтьєвим було введено систему функцій $\{\psi_n(z)\}$, яка є біортогональною до системи $\{e^{\lambda_n z}\}$, яка фігурує в розвиненні (1).

Виявилося, що ця система має лише теоретичне значення. Навіть у класичному випадку рядів Фур'є ($Q = [-\pi; \pi]$) для $\psi_n(z)$ достатньо складно одержати явні вирази.

Нехай $L_2(\Gamma)$ є простір усіх комплексно значних функцій $f(z)$, визначених на границі Γ квадрата $Q(l)$, які мають інтегрований квадрат модуля

$$\int_J |f(z)|^2 |dz|.$$

Скалярний добуток в $L_2(\Gamma)$ визначається формулою:

$$\int_J f(z)\overline{g(z)}|dz|. \tag{3}$$

Крім скалярного добутку (3) розглянемо також в $L_2(\Gamma)$ псевдоскалярний добуток

$$\langle f, g\rangle = \int_\Gamma f(z)\overline{g(z)}dz, \tag{4}$$

який відрізняється від скалярного добутку (3) тільки тим, що диференціал dz в (4) береться без модуля. Враховуючи властивості криволінійних інтегралів для функцій комплексної змінної [26] для добутку (4) дістанемо представлення після відповідних замін змінних

$$\begin{aligned}\langle f; g\rangle &= \int_{-l}^{l} f(x-il)\overline{g(x-il)}dx + i\int_{-l}^{l} f(l+iy)\overline{g(l+iy)}dy + \\ &+ i^2\int_{-1}^{1} f(x+il)\,\overline{g(x+il)}\,dx + i^3\int_{-l}^{l} f(-l+iy)\overline{g(-l+iy)}dy\end{aligned}. \tag{5}$$

Розщепивши $L_2(\Gamma)$ на пряму суму

$$L_2(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^{4} L_2(\Gamma_k), \tag{6}$$

де $L_2(\Gamma_k)$ складається з функцій, які відмінні від 0 тільки на Γ_k. Введемо оператор J, який функції з $L_2(\Gamma_1)$ множить на 1, функції з $L_2(\Gamma_2)$ множить на i, функції з $L_2(\Gamma_3)$ множить на $i^2 = -1$, функції з $L_2(\Gamma_4)$ множить на $J^3 = -i$. Таким чином маємо простори $L_2(\Gamma_k)$, які є власними підпросторами оператора J. Очевидно, оператор J задовольняє умову

$$J^4 = I,$$

де I − одиничний оператор $L_2(\Gamma)$. Зауважимо, що у випадках індефінітної метрики [3] відповідний оператор J задовольняє умову

$$J^2 = I.$$

За допомогою оператора J псевдодобуток (4) можна виразити через добуток (3)

$$\langle f; g\rangle = (Jf; g).$$

У $L_2(\Gamma)$ виділимо підпростір $H_2(Q(l))$ типу Гарді, що складається з функцій аналітичних у середині квадрата $Q(l)$, які мають інтегрований квадрат модуля на сторонах $Q(l)$. Відносно скалярного добутку (3) $H_2(Q(l))$ є гільбертовим простором [25]. У $H_2(Q(l))$ розглянемо також псевдоскалярний добуток (4). Якщо $g(z) = C = \text{const}$, то $\langle f, g\rangle = \overline{C}\int_\Gamma f(z)dz$. Внаслідок аналогічності $f(z)$ всередині $Q(l)$ за теоремою Коші [26] $\int_\Gamma f(z)dz = 0$, а отже $\langle f; C\rangle = 0$. Аналогічну ситуацію будемо мати і у випадку $f(z) = \text{const}$. Якщо f, g є $H_2(Q(l))$ обидві відмінні від констант, то добуток (4) взагалі не рівний нулю, оскільки $f(z)\overline{g(z)}$ не є аналітичною функцією.

У просторі $H_2(Q(l))$ розглянемо необмежений лінійний оператор A, що породжується диференціальним виразом $i\frac{d}{dz}$. За початкову область визначення $D_0(A)$ візьмемо множину функцій $f(z)$ з $H_2(Q(l))$, які є аналітичними на сторонах квадрата. Мається на увазі, що $f(z)$ допускає аналітично продовження в деяку відкриту множину, що містить у собі замкнений квадрат $Q(l)$. Має місце таке твердження.

Теорема 1. Відносно псевдоскалярного добутку (4) на $D_0(A)$ оператор $A = i\frac{d}{dz}$ є J-симетричним, тобто

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle.$$

Доведення.

Маємо $\langle Af; g\rangle = \int_\Gamma i\left(\frac{d}{dz}f(z)\right)\overline{g(z)}dz = \sum_{k=1}^{4}\int_{A_k}^{A_{k+1}} if'(z)\overline{g(z)}dz$

(вважаємо $A_5 = A_1$). Застосувавши формулу інтегрування частинами для кожної сторони квадрата, дістанемо аналог формули Гріна

$$\begin{aligned}\langle Af; g\rangle &= i\sum_{k=1}^{4}\int_{A_k}^{A_{k+1}} \overline{g(z)}df(z) = \\ &= i\sum_{k=1}^{4}\left(f(A_{k+1})\overline{g(A_{k+1})} - f(A_k)\overline{g(A_k)}\right) - i\sum_{k=1}^{4}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(z)\overline{g'(z)}dz.\end{aligned} \tag{7}$$

В алгебраїчній сумі поза інтегральних доданків кожен добуток $f(A_k)\overline{g(A_k)}$ присутній двічі. Один раз зі знаком «+» і другий раз із знаком «–». Отже, позаінтегральні члени в (6) взаємознищуються. Врахувавши, що $\bar{i} = -i$, остаточно дістанемо

$$\langle Af; g\rangle = -i\sum_{k=1}^{4}\int_{A_k}^{A_{k+1}} \overline{g'(z)}f(z)dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{4}\int_{A_k}^{A_{k+1}} \overline{ig'(z)}f(z)dz = \int_\Gamma f(z)\overline{ig'(z)}dz = \langle f; Ag\rangle.$$

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що відносно скалярного добутку (3) оператор *A* не є симетричним, оскільки після застосування інтегрування частинами позаінтегральні члени не знищуються.

Теорема 2. Система функцій $\varphi_0(z) \equiv 1$ та $\varphi_{nk}(z), n \in N, k = \overline{1,4}$, утворює власний базис оператора *A*.

Доведення.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $A1 = i\dfrac{d}{dz}(1) = 0$,

$$A\varphi_{nk}(z) = i\frac{d}{dz}\exp\left(i^{k-1}\frac{\pi n}{l}(z-\alpha_k)\right) = i^k\frac{\pi n}{l}\varphi_{nk}(z).$$

Отже, 1, $\varphi_{nk}(z)$ є власні функції оператора *A*, а $\lambda_0 = 0$ та $\lambda_{nk} = \dfrac{\pi}{e}ni^{3-k}$ є власними числами оператора *A*. Теорему 2 доведено.

Теорема 3. У метриці породженій скалярним добутком (3) простір $H_2(Q_0)$ є прямою неортогональною сумою замкнених підпросторів $H(k)$

$$\mathrm{H}_2(Q_0) = \bigoplus_{k=4}^{4}\mathrm{H}(k).$$

Доведення. Доведемо замкненість підпросторів $H(k)$ в $H_2(Q_0)$. Для нього оцінимо кути θ_{jk} між підпросторами $H(j)$ та $H(k)$, $j,k = \overline{0,4}, j \neq k$. Ці кути визначаються з таких умов: $\cos\theta_{jk} = \sup\limits_{\substack{f\in H(j)\\ g\in H(k)}} \dfrac{(f,g)}{\|f\|\cdot\|g\|}$, $0 \le \theta_{jk} \le \dfrac{\pi}{2}$.

Визначити величини скалярних добутків

$$(\varphi_{mj},\varphi_{nk}) = \mathrm{I}(m,j,n,k),$$

де $m,n \in \mathrm{N}; j,k = \overline{1,4}$.

Ці величини запишемо у вигляді сум:

$$\mathrm{I}(m,j,n,k) = \sum_{s=1}^{4}\mathrm{I}_s(m,j,n,k), \text{ де}$$

$$\mathrm{I}_s(m,j,n,k) = \int_{\Gamma_s}\varphi_{mj}(z)\overline{\varphi_{nk}(z)}|dz|.$$

З урахуванням відповідних замін змінних та рівності $e^{2\pi mi} = 1, m \in \mathrm{N}$, одержимо

$$\mathrm{I}_1(m,1,n,1) = \int_0^{2\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}dx = 2\pi\delta_{mn},$$

$$\left(\delta_{mn} = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ 1, m = n \end{cases}\right., \text{ символ Кронекера),}$$

$$\mathrm{I}_2(m,1,n,1) = \mathrm{I}_4(m,1,n,1) = \int_0^{2\pi} e^{-(m+n)y}dy = \frac{1}{m+n}\left(1 - e^{-2\pi(m+n)}\right),$$

$$\mathrm{I}_3(m,1,n,1) = e^{-2\pi(m+n)}\int_0^{2\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}dx = 2\pi e^{-2\pi(m+n)}\delta_{mn},$$

$$\mathrm{I}_1(m,1,n,3) = e^{-2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{\overline{-inx}}dx = 0.$$

Для $m \neq n$ маємо:

$$\mathrm{I}_2(m,1,n,3) = \mathrm{I}_4(m,1,n,3) = e^{-2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-(m-n)y}dy = \frac{1}{m-n}\left(e^{-2\pi m} - e^{-2\pi n}\right)$$

Для $m = n$ маємо:

$$\mathrm{I}_2(m,1,n,3) = \mathrm{I}_4(m,1,n,4) = e^{-2\pi m}\int_0^{2\pi} dy = 2\pi e^{-2\pi m},$$

$$\mathrm{I}_3(m,1,n,3) = e^{-2\pi m}\int_0^{2\pi} e^{imx} - e^{\overline{inx}}dx = 0,$$

$$\mathrm{I}_1(m,1,n,4) = \int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-nx}dx = \frac{1}{n-im}\left(1 - e^{-2\pi n}\right) = \frac{i}{m+in}\left(1 - e^{-2\pi n}\right).$$

$$\mathrm{I}_2(m,1,n,4) = e^{-2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-my}e^{\overline{-iny}}dy = \frac{1}{in-m}\left(e^{-2\pi n(m+n)} - e^{-2\pi n}\right) =$$

$$= \frac{1}{m-in}\left(e^{-2\pi n} - e^{-2\pi n(m+n)}\right),$$

$$\mathrm{I}_3(m,1,n,4) = e^{-2\pi m}\int_0^{2\pi} e^{imx-nx}dx =$$

$$= \frac{1}{im-n}\left(e^{-2\pi n(m+n)} - e^{-2\pi n}\right) = \frac{-i}{m+in}\left(e^{-2\pi(m+n)} - e^{-2\pi n}\right),$$

$$\mathrm{I}_4(m,1,n,4) = \int_0^{2\pi} e^{-my}e^{\overline{-iny}}dy = \frac{1}{m-in}\left(1 - e^{-2\pi m}\right).$$

Внаслідок симетрії решти значень $\mathrm{I}_s(m,j,n,k)$ можуть бути визначені за допомогою знайдених. Тоді:

$$\|\varphi_0\|^2 = (\varphi_0,\varphi_0) = \int_J |dz| = 8\pi, (\varphi_0,\varphi_{n1}) = (\varphi_0,\varphi_{n2}) = (\varphi_0,\varphi_{n3}) =$$

$$= (\varphi_0,\varphi_{n4}) = \int_J e_{inz}dz = 2\int_0^{2\pi} e^{-ny}dy = \frac{2}{n}(1 - e^{-2\pi n}),$$

$$\|\varphi_{nk}\|^2 = 2\pi(1 + e^{-4\pi n}) + \frac{1}{n}(1 - e^{-4\pi n}) > 2\pi, n \in N, k = \overline{1,4}.$$

$$(\varphi_{m1},\varphi_{n4}) = \frac{(i+1)(m+n)}{m^2+n^2}(1 - e^{-2\pi(m+n)} + \frac{(i-1)(m-n)}{m^2+n^2}(e^{-2\pi m} - e^{-2\pi n}),$$

$$(\varphi_{m1},\varphi_{n3}) = \frac{2}{m-n}(e^{-4\pi m} - e^{-4\pi n}), (m \neq n), (\varphi_{m1},\varphi_{m4}) = e^{-4\pi m}.$$

Оцінимо величини $(0,n,k)$ та $c(m,j,n,k)$, які є косинусами кутів між одновимірними просторами, породженими функціями $\varphi_0(z)$ та $\varphi_{nk}(z)$ $n \in N, j = \overline{1,4}$, відповідно $\varphi_{mj}(z)$ та $\varphi_{nk}(z), m,n \in N; j,k = \overline{1,4}$ (хоча б одна пара індексів *m* і *n* або *j* та *k* різна).

$$c(o,n,k) = \frac{|(\varphi_0,\varphi_{nk}|}{\|\varphi_0\|\cdot\|\varphi_{nk}\|} < \frac{1}{2\pi}e^{-4\pi m},$$

$$c(m,1,n,4) = \frac{|(\varphi_{m1},\varphi_{n4})|}{\|\varphi_{mj}\|\cdot\|\varphi_{nk}\|} < \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(m^2+n^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$c(m,1,n,3)=\frac{|(\varphi_{m1},\varphi_{n3}|}{\|\varphi_{n1}\|\cdot\|\varphi_{n3}\|}<\frac{1}{\pi}e^{-4\pi m},$$

$$c(m_1,n,1)=\frac{|(\varphi_{m1},\varphi_{n1})|}{\|\varphi_{m1}\|\cdot\|\varphi_{n1}\|}<\frac{1}{\pi(m+n)},(m\neq n).$$

Косинуси кутів $\theta_{jk}, j,k=\overline{1,4}, j\neq k$ можна визначити як норми лінійних операторів $C(k, j)$, діючих в l_2, які визначаються матрицями $\{c(m,j,n,k)\}_{m,n\in N}$.

Оцінимо норму оператора в l_2, якому відповідає матриця $C(1,4)$. Для цього покажемо, що матриця $D=\{d_{mn}\}_{m,n\in N}, d_{mn}=(m^2+n^2)^{-\frac{1}{2}}$ визначає в l_2 компактний оператор, що належить ідеалу Шеттена σ*p* при *p* = 4. [27,28].

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\|D_{e_m}\|_{e_2}^4=\sum_{m=1}^{+\infty}(\|de_m\|_{e_2}^2)^2=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}d_{mn}^2\right)^2=$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty}(m^2+n^2)^{-1})^2\leq\sum_{m=1}^{+\infty}(\int_m^{+\infty}\frac{dx}{m^2+x^2})^2\leq\sum_{m=1}^{+\infty}(\frac{\pi}{4m})^2=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{96}$$

Звідси отримаємо

$$\|D\|\leq(\frac{\pi^4}{96})^{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt[4]{3}},$$

$$\cos\theta_{14}=\|C_{14}\|<\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt[4]{3}}=12^{-\frac{1}{4}}=0,537,$$

$$\frac{\pi}{4}<\theta_{14}<\frac{\pi}{2}$$

Інші кути $\theta_{jk}, j\neq k; j,k=\overline{0,4}$ також належать проміжку $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Таким чином простори $H(k), k=\overline{0,4}$ замкнені в $H_2(Q_0)$, а система функцій $\varphi_0(z),\varphi_{nk}(z), n\in N, k=\overline{1,4}$ утворює в $H_2(Q_0)$ базис Рісса. Теорему 3 доведено.

Безпосередньою перевіркою можна показати, що при фіксованих $j,k=\overline{1,4}, |j-k|=2$, функції $\varphi_{mj}(z),\varphi_{nk}(z)$ утворюють відносно псевдодобутку (4) ортогональну систему.

Розглянемо ще один псевдодобуток:

$$\langle f_i;g\rangle_1=\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx+i\int_0^{2\pi}f(2\pi+iy)g(2\pi+iy)dy-$$

$$-\int_0^{2\pi}f(x+2\pi)\overline{g(x+2\pi i)}\,dx-i\int_0^{2\pi}f(iy)g(iy)dy,$$

$$f,g\in H_2(Q_0).$$

Від добутку (4) цей добуток відрізняється другим та четвертим доданком, в яких відсутній знак відмінювання. Виявляється, що в цьому скалярному добутку кожна функція $\varphi_{m1}(z)$ ортогональна до всіх інших $\varphi_{nk}(z)$. Отже, це дозволяє побудувати інтегральний оператор, що проектує $H_2(Q_0)$ на $H(1)$.

1. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
2. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Операторный подход к задачам апроксимации / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9. – Вып. 6. – С. 90–108.
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. – М. : Наука, 1986. – С. 352.
4. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения / А. Ф. Леонтьев // Труды матем. Ин-та им. В. А. Стеклова. – 1951. – Т. XXXIX– С. 57–95.
5. Леонтьев А. Ф. О представлении функций последовательностью полиномов Дирихле / А. Ф. Леонтьев // Мат. сб. – 1966. – 70, № 1. – С. 132–144.
6. Леонтьев А. Ф. О представлении функций обобщёнными рядами Дирихле / А. Ф.Леонтьев // Успехи мат. наук. – 1969. – 24, № 2. – С. 97–164.
7. Леонтьев А. Ф. К вопросу о представлении аналитических функций рядами Дирихле / А. Ф. Леонтьев // Мат. сб.– 1969. – 80, № 1. – С. 117–157.
8. Леонтьев А. Ф. О представлении аналитических функций в замкнутой области рядами Дирихле / А. Ф. Леонтьев // Изд. АН СССР. Сер. мат.– 1973. – 37, № 3. – С. 577–592.
9. Леонтьев А. Ф. О представлении аналитических функций в виде суммы периодических / А. Ф. Леонтьев // Мат. сб. – 1974. – 93, № 4. – С. 512–528.
10. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1980. – 526 с.
11. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды експонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1983. – 176 с.
12. Белый В. И., Голуб А. П., Шевчук И. А. Исследования В.К.Дзядыка по теории приближения функций комплексного переменного / В. И. Белый, А. П. Голуб, И.А. Шевчук // Укр. мат. жур. – 1989. – 41, № 4. – С. 441–454.
13. Дзядык В. К., Крутиголова Е. К. О представлении аналитических функций рядами Дирихле на границе области сходимости / В. К. Дзядык, Е. К. Крутиголова // Мат. заметки. – 1973. – 14, № 6. – С. 769–780.
14. Дзядык В. К. Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках / В. К. Дзядык // Мат. сб. – 1974. – 95, № 4. – С. 475–493.
15. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутом круге / Ю. И. Мельник // Мат. сб. – 1975. – 94, № 4. – С. 493–501.
16. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутых выпуклых многоугольниках / Ю. И. Мельник // Укр. мат. журн. – 1977. – 29, № 6. – С. 826–830.
17. Мельник Ю. И. О представлении аналитических функций в виде суммы периодических / Ю. И. Мельник // Мат. заметки. – 1984. – 36, № 6. – С. 847–856.

18. Седлецкий А. М. Базисы из экспонент в пространствах E^p на выпуклых многоугольниках / А. М. Седлецкий // Изд. АН СССР. Сер. мат. – 1978. – 42, № 5. – С. 1101–1119.
19. Седлецкий А. М. О разложениях функций в ряды Дирихле на замкнутых выпуклых многоугольниках / А. М. Седлецкий // Сиб. мат. журн. – 1978. – 19, № 4. – С. 878–887.
20. Седлецкий А. М. Разложение аналитической функции на сумму периодических / А. М. Седлецкий // Изд. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – 48, № 4. – С. 833–853.
21. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функцій. Коэффициенты Дирихле / И. Ф. Красичков-Терновский // Функциональный анализ и его приложения. – 1973. – Вып. 4. – С. 38–43.
22. Хромов А. П. Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле / А. П. Хромов // Матем. Заметки. – 1969. – Т. 6, № 6. – С. 759–766.
23. Хромов А. П. О представлени произвольных функций некоторыми специальными рядами / А. П. Хромов // Матем. сб. – 1970. – Т. 83 (125), № 2(10). – С. 165–180.
24. Напалков В. В. Об одном методе восстановления функции по её коэффициентам Дирихле / В. В. Напалков // Матем. Заметки. – 1975. – Т. 17, № 4. – С. 358–365.
25. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимаций в комплексной области / Д. Гайер. – М. : Мир, 1986. – 216 с.
26. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.
27. Schatten R. Norm ideals of completely continuous operators. – Berlin ets. Springer – Verlag, 1960. – 320 p.
28. Пич А. Операторные идеалы / А. Пич. – М. : Мир, 1982. – 536 с.

Kashpirovskyi O.I.

ABOUT THE USAGE OF COMPLEX-VALUED PSEUDOMETRIC FOR EXPOSITION RESEARCH IN DIRICHLET'S FUNCTIONS ANALYTICAL INSIDE THE SQUARE

Dirichlet's series for functions analytical inside the square are considered as exposition of eigen functions of differentiated operator. The analogue of Green's formula is ascertained with the help of pseudometric. The method of metrics introduction is showed, where Dirichlet's series are an exposition of orthogonal system of functions.

Key words: *expansion, Fourier series, Dirichlet's series, scalar product, pseudometric, analytical function, convex polygon.*